

# Estimativo de error a posteriori para un FEM en un modelo tipo Boussinesq 2d

## A posteriori error estimate for a FEM in a Boussinesq 2d model

Luis Fernando Mejía Rodríguez 1  
Universidad Nacional Abierta y a Distancia

### Resumen

Este trabajo estudia la aproximación numérica de la solución de un sistema tipo Boussinesq 2D, no lineal, en donde implementamos un método de error a posteriori para el refinamiento automático de la malla del método de elementos finitos para disminuir el error en la aproximación. En trabajos anteriores se ha estudiado la existencia y unicidad de soluciones para este tipo de sistemas (Mejía & Muñoz, 2021; Chen, 2009). En esta continuación de nuestro trabajo presentamos estimaciones de error a posteriori para las aproximaciones semidiscretas y las comparamos con otros estimativos obtenidos de forma automática (Rognes & Logg, 2013).

**Palabras clave:** método de elementos finitos, estimativo a posteriori, sistemas Boussinesq.

### Abstract

This work studies the numerical approximation of the solution of a non-linear 2D Boussinesq type system, where we implement a posteriori error method for the automatic refinement of the finite element method mesh to reduce the error in the approximation. In previous works, the existence and uniqueness of solutions for this type of system has been studied (Mejía & Muñoz, 2021; Chen, 2009). In this continuation of our work, we present post hoc error estimates for semi-discrete approximations and compare them with other estimates obtained automatically (Rognes & Logg, 2013).

**Keywords:** finite element method, a posteriori estimate, Boussinesq systems.

---

<sup>1</sup> Doctor en Ciencias Matemáticas. Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería. <http://orcid.org/0000-0003-4494-8410/>  
luis.mejia@unad.edu.co

## Introducción

En los últimos años, ha habido varios desarrollos analíticos y computacionales en el estudio de la propagación de ondas acuáticas. Sin embargo, aún existe la necesidad de modelos matemáticos precisos y estrategias numéricas que nos permitan resolverlos de manera más eficiente y con menor costo computacional. Una estrategia es el uso de estimativos de error a posteriori para refinar la malla del FEM en los lugares necesarios y de esta manera disminuir la cantidad de cálculos para obtener buenos resultados en la aproximación de la solución.

Las ecuaciones de Euler completas (que describen el flujo de un fluido incompresible, irrotacional y no viscoso) se pueden simplificar a modelos reducidos más manejables, cuando el fenómeno físico se restringe a un régimen de escala asintótico específico. Bajo esta estrategia de modelado tenemos las ecuaciones tipo Boussinesq que incluyen los términos de orden más bajo con respecto a la no linealidad y los efectos dispersivos (Bona & Chen, 1998; Bona, Chen & Saut, 1998).

Las soluciones exactas para estos modelos de ondas de agua no lineales con condiciones iniciales y dominios espaciales arbitrarios no suelen estar disponibles, por lo tanto, un modelo numérico de estas soluciones es un problema muy importante que debe abordarse. Para realizar esta tarea, debido a las dificultades derivadas de la complejidad de las ecuaciones diferenciales gobernantes y la necesidad de tratar con fronteras irregulares, se usa el método de elementos finitos que con la flexibilidad de una malla variable es más versátil que el método de diferencias finitas o espectrales en dominios geoméricamente complejos.

Entre los trabajos previos que utilizan el método de elementos finitos para sistemas tipo Boussinesq, tenemos Mitsotakis, Ilan & Dutykh (2014); Mitsotakis, Synolakis & McGuinness (2017); Dougalis, Mitsotakis & Saut (2007); Chen (2009); Dougalis, Mitsotakis & Saut (2009), los cuales utilizaron el enfoque estándar de semidiscretización (también conocido como método de líneas verticales) donde la primera etapa es la discretización del dominio espacial y en la segunda se resuelve el sistema resultante de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable temporal mediante uno de los solucionadores habituales de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el presente trabajo, se considera un sistema bidimensional tipo Boussinesq para describir la interacción de ondas de agua dispersivas y no lineales con un fondo irregular dependiente del tiempo. Este modelo matemático es mencionado por Chen (2009) y se puede obtener siguiendo el mismo procedimiento que en Chen (2004) para el caso unidimensional (Mejía, 2009). A diferencia de otras formulaciones de Boussinesq en la literatura existente, la principal característica de este modelo en particular es que el efecto topográfico aparece como un término forzado sin alterar los términos de tipo dispersivo de tercer orden.

En este trabajo, introducimos un método eficiente de elementos finitos que sigue un método semidiscreto de línea horizontal (método de Rothe), donde primero discretizamos la variable temporal usando un esquema de diferencias finitas de segundo orden tipo Crank-Nicholson, y luego, en cada paso de tiempo, las variables espaciales se discretizan utilizando el método de elementos finitos, donde los elementos que usamos son triángulos y las funciones de elementos finitos son Lagrangeanos lineales, tanto para superficie libre como para el campo de velocidad horizontal. El método de Rothe conduce a una secuencia de problemas estacionarios que se pueden resolver eficientemente con los solucionadores apropiados que se encuentran en las bibliotecas de software disponibles públicamente. Además, es relativamente fácil probar varios tipos de esquemas de diferencias finitas en el tiempo para la primera etapa del esquema numérico. Estas son ventajas importantes de este enfoque alternativo para el modelado numérico de PDE evolutivas. Otra ventaja sobre el método estándar de líneas verticales es que el método Rothe puede emplear fácilmente diferentes discretizaciones espaciales en diferentes instantes de tiempo, lo que es útil para modelar fenómenos de ondas de agua donde se necesitan mallas adaptativas para seguir detalles en movimiento localizados en la solución. Otro caso donde la adaptabilidad es importante es cuando hay algunas áreas en el dominio con esquinas, donde necesitamos refinar la malla utilizada en el paso de tiempo anterior para mantener el rendimiento del esquema numérico. Por el contrario, si primero discretizamos la variable espacial, lo que lleva a un gran sistema ODE, entonces tenemos que elegir una malla de una vez por todas.

La implementación numérica se realiza con la ayuda del FEniCS Project, que es una plataforma de computación paralela de código abierto para automatizar la aproximación de soluciones de modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales parciales (Logg, Mardal & Wells, 2011).

## Motivación

Sean  $A, A_h \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices y  $b, b_h \in \mathbb{R}^n$  vectores. Encontrar  $x, x_h \in \mathbb{R}^n$  tal que

$$Ax = b, A_h x_h = b_h$$

Donde  $h$  es un parámetro que indica la calidad en la aproximación, es decir,  $A_h \rightarrow A$  y  $b_h \rightarrow b$  cuando  $h \rightarrow 0$

El error en la aproximación es definido por:

$$e := x - x_h$$

Usualmente el análisis del error a priori es basado en un error de truncamiento  $\tau$  y usa la identidad:

$$A_h e = A_h x - A_h x_h = A_h x - b_h = \tau$$

Luego una cota del error a priori (discreta), con  $C_{s,h} \in \mathbb{R}$  estaría dada por

$$\|e\| \leq C_{s,h} \|\tau\|, C_{s,h} := \|A^{-1}\|$$

En contraste con esto, el análisis de error a posteriori usa la relación:

$$Ae = Ax - Ax_h = b - Ax_h = \rho$$

Por tanto, una cota del error a posteriori (continua) estaría dada por:

$$\|e\| \leq C_s \|\rho\|, C_s := \|A^{-1}\|$$

Extendemos esta idea para calcular el error en un funcional  $J$ . Para  $j \in \mathbb{R}^n$  suponga que deseamos calcular el error en el funcional  $J$

$$J(e) = J(u) - J(u_h) = (e, j) \quad (1)$$

Para determinar el error en el funcional considere la solución  $z \in \mathbb{R}^n$  del problema dual asociado

$$A^* z = j \quad (2)$$

por tanto

$$J(e) = (e, j) = (e, A^* z) = (Ae, z) = (\rho, z) \quad (3)$$

y finalmente el estimativo de error a posteriori

$$|\mathcal{J}(e)| \leq \sum_{i=1}^n |\rho_i| |z_i| \quad (4)$$

Queremos extender el análisis anterior del error a posteriori a problemas no lineales. Sea  $A(\cdot), A_h(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones diferenciables y  $b, b_h \in \mathbb{R}^n$  vectores dados y considere el problema

$$A(x) = b, A_h(x_h) = b_h$$

Usando la matriz Jacobiana  $A'(x)$  y el residual no lineal  $\rho := b - A(x_h)$  tenemos:

$$(A(x) - A(x_h), y) = \int_0^1 (A'(x_h + se)e, y) ds = (Be, y), \forall y \in \mathbb{R}^n$$

con la matriz  $B := \int_0^1 A'(x_h + se) ds$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  la solución del problema dual correspondiente  
 Para todo funcional  $\mathcal{J}(\cdot)$

, sea

$$B^*z = j \quad (5)$$

Donde la regularidad de  $B^*$  es asumida

$$\mathcal{J}(e) = (e, j) = (e, B^*z) = (Be, z) = (A(x) - A(x_h), z) = (\rho, z)$$

lo que nos permite estimar los pesos del error a posteriori

$$|\mathcal{J}(e)| \leq \sum_{i=1}^n |\rho_i| |z_i| \quad (6)$$

- $z$  no puede ser calculado ya que depende del error  $e$  que es desconocido Con la idea de superar este problema vamos a aproximar  $B$  por

$$B := \tilde{B}(x_h, x_h) = \int_0^1 A'(x_h) ds = A'(x_h)$$

y resolviendo el problema dual

aproximamos el error por

$$A'_h)^* = \begin{pmatrix} x_h & z_h & j_h \end{pmatrix} \quad (7)$$

(8)

$$|J(e)| \approx \eta := \sum_{i=1}^n |(\rho, z_h)| \leq \sum_{i=1}^n w_i |\rho_i| \quad \tilde{w}_i := |z_{h,i}|$$

### Estimativo a posteriori

Sean  $V$  y  $\hat{V}$  espacios de Hilbert definidos en un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , para  $d = 1, 2, 3$ . Considere el siguiente problema variacional: Encontrar  $u \in V$  tal que:

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \hat{V} \quad (9)$$

Asumimos que  $a : V \times \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma bilineal continua y que  $L : \hat{V} \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional lineal

continuo. Sea  $T_h$  una partición de  $\Omega$  y suponga que  $V_h \subset V$  y  $\hat{V}_h \subset \hat{V}$  son espacios de elementos finitos relativos a la triangulación  $T_h$

El problema variacional discreto relacionado a (9) es: Encontrar  $u_h \in V_h$  tal que:

$$a(u_h, v) = L(v), \quad \forall v \in \hat{V}_h \quad (10)$$

Suponemos problema (9) cumple las condiciones del teorema de Lax-Milgram para garantizar la existencia y unicidad en la solución del problema discreto

Definimos el residual como:

$$r(v) = L(v) - a(u_h, v) \quad (11)$$

- $r(v)$  es un funcional lineal acotado
- $r(v) = 0, \forall v \in \hat{V}_h$

Estamos interesados en estimar la magnitud del error en un funcional objetivo  $M : V \rightarrow \mathbb{R}$ , para una tolerancia  $\epsilon > 0$  nuestro objetivo es encontrar  $(V_h, \hat{V}_h)$  tal que  $u_h$  satisfice

$$\eta \equiv |M(u) - M(u_h)| \leq \epsilon$$

Para estimar la magnitud del error introducimos el problema dual. Encontrar  $z \in V^*$  tal que:

$$a^*(z, v) = M(v), \forall v \in \hat{V}^* \quad (12)$$

Donde  $(V^*, \hat{V}^*)$  son el par dual del espacio trial y test,  $a^*$  denota el adjunto de  $a$  que es  $a^*(v, w) = a(w, v)$  Buscamos que:

$$\begin{aligned} M(u) - M(u_h) &= a^*(z, u - u_h) = a(u - u_h, z) \\ &= L(z) - a(u_h, z) \equiv r(z) \end{aligned} \quad (13)$$

Donde suponemos que el espacio Test y Trial se eligen tal que  $u - u_h \in \hat{V}^*$  y  $z \in \hat{V}$ , esto se tiene si,  $\hat{V}^* = V_0 = \{v - w : v, w \in V\}$  y  $V^* = V$

Por la ortogonalidad del error en el método Galerkin aplicado a (13) obtenemos la siguiente representación del error

$$M(u) - M(u_h) = r(z) = r(z - \pi_h z) \quad (14)$$

Aquí  $\pi_h z \in \hat{V}_h$  es un campo en el espacio Trial, típicamente un interpolante de la solución

### Extensión a problemas no lineales

Consideremos el problema variacional no lineal: Encontrar  $u \in V$  tal que:

$$F(u, v) = 0, \quad \forall v \in \hat{V} \quad (15)$$

Para un funcional objetivo no lineal  $M : V \rightarrow \mathbb{R}$  definimos el problema dual asociado como encontrar

$z \in V^*$  tal

que: 
$$F'^*(z, v) = M'(v), \quad \forall v \in \hat{V}^* \quad (16)$$

Donde,  $\hat{V}^* = V_0$  y  $V^* = \hat{V}$ . La forma bilineal  $F'$  es un promedio apropiado de la derivada de Frechet

$$F'(u, v) = \frac{\partial F(u, v)}{\partial u} \quad (17)$$

$$F'(\bar{u}, \cdot) = \int_0^1 F'(su + (1-s)u_h, \cdot) ds \quad (18)$$

Note que por la regla de la cadena tenemos

$$F'(u - u_h, \cdot) = F(u, \cdot) - F(u_h, \cdot).$$

El funcional lineal  $M'$  es definido similarmente, por tanto:

$$\begin{aligned} M(u) - M(u_h) &= M'(u - u_h) = F'^*(z, u - u_h) = F'(u - u_h, z) \\ &= F(u, z) - F(u_h, z) \\ &= -F(u_h, z) \equiv r(z) \end{aligned} \quad (19)$$

### 1.1. Modelo tipo Boussinesq

Válido como aproximación de las ecuaciones de Euler para el problema considerado si los parámetros  $a = a_0/h_0$ ,  $\beta_0 = h^2/\lambda^2$  son pequeños.

$$V_t + \nabla \tilde{\eta} + \frac{1}{2} \nabla |V|^2 - \frac{1}{6} \Delta V = -\nabla \left( \frac{P}{3} \right) \quad (20)$$

$$\tilde{\eta} + \nabla \cdot V + \frac{1}{6} \nabla \cdot (\tilde{h} + \tilde{\eta}) V - \frac{1}{6} \Delta \tilde{\eta} = -\tilde{h}, \quad (21)$$

$$t \qquad \qquad \qquad 6 \qquad \qquad \qquad t$$

donde,

$$\begin{aligned} V &= (u(x, y, t), \\ &v(x, y, t)), \qquad \tilde{\eta} = \tilde{\eta}(x, y, t), \\ P_0 &= P_0(x, y, t), \quad \tilde{h} = \tilde{h}(x, y, t), \end{aligned}$$

$$(x, y) \in \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2 \text{ y } t \in \mathbb{R}^+$$

$$\Omega = [-15, 15] \times [-30, 50]$$

$$u_0 = 0,$$

$$v = \eta_0 - \frac{1}{4} \eta_0^2,$$

$$\eta = A \operatorname{sech}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{y + 10}{c_s} \right),$$

$$A = 0.1, \quad c_s = 1 + \frac{A}{2},$$

$$h = 0, \quad P_0 = 0.$$

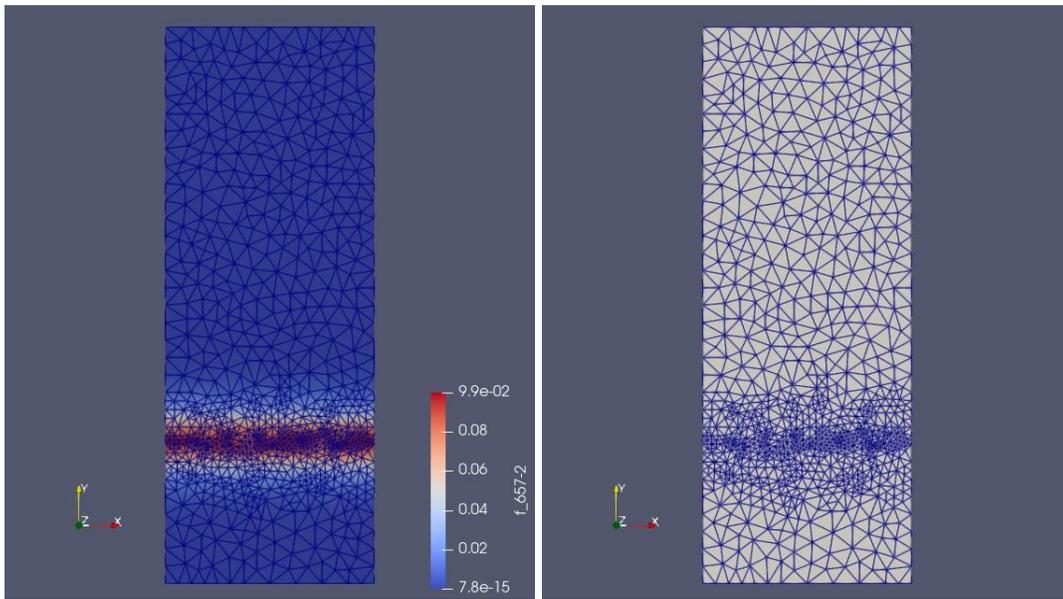


Figura 1: Solución y malla para modelo tipo Boussinesq  $t = 1$  y malla para modelo tipo Boussinesq  $t = 1$

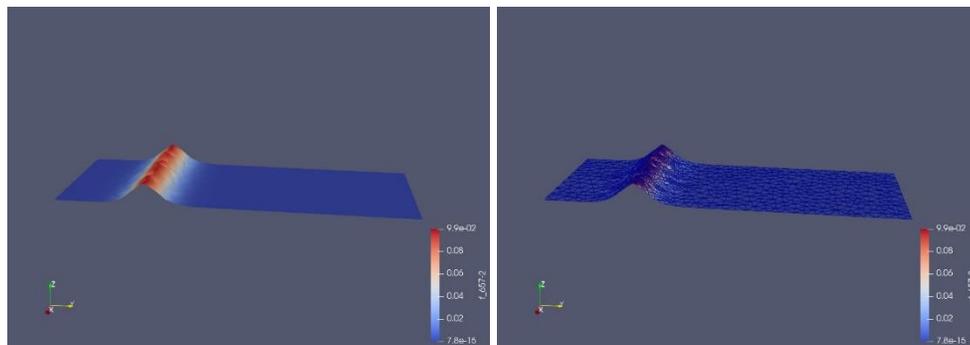


Figura 2: Solución para modelo tipo Boussinesq  $t = 1$  y solución y malla para modelo tipo Boussinesq  $t = 1$

## Referencias

- Bona, J. L. & Chen, M. (1998). A boussinesq system for two-way propagation of nonlinear dispersive waves. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 116(1-2), 191–224.
- Bona, J. L., Chen, M. & Saut, J. C. (2004). Boussinesq equations and other systems for small-amplitude long waves in nonlinear dispersive media: II. the nonlinear theory. *Nonlinearity*, 17(3), 925.
- Boussinesq J. V. (1976). *Theory of waves and surges which propagate the length of a horizontal rectangular canal, imparting to the fluid contained within the canal velocities that are sensibly the same from the top to the bottom*. Texas A & M University, College of Geosciences.
- Chen, M. (2003). Equations for bi-directional waves over an uneven bottom. *Mathematics and Computers in Simulation*, 62(1-2), 3–9.
- Chen, M. (2009). Numerical investigation of a two-dimensional Boussinesq system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 23(4), 1169–1190.
- Dougalis, V. A., Mitsotakis, D.E. & Saut, J. C. (2007). On some Boussinesq systems in two space dimensions: Theory and numerical analysis. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 41(5), 825–854, 2007.
- Dougalis, V.A., Mitsotakis, D.E. & Saut, J.C. (2009). On initial-boundary value problems for a Boussinesq system of BBM-BBM type in a plane domain. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 23(4), 1191–1204, 2009.
- Logg, A. Mardal, K. & Wells, G.N. (2011). *Automated solution of differential equations by the finite element method*. New Jersey: Springer.
- Mejía, L. F. & Muñoz Grajales, J. C. (2021). Analytical and rothe time-discretization method for a boussinesq-type system over an uneven bottom. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 102, 105951.
- Mejía, L. F. (2019). *Estudio analítico y numérico de un modelo bidimensional para la propagación de ondas en la superficie de un canal con fondo irregular*. (Tesis de doctorado). Universidad del

Valle, Cali.

- Mitsotakis, D., Ilan, B. & Dutykh, D. (2014). On the Galerkin/finite-element method for the Serre equations. *Journal of Scientific Computing*, 61(1), 166–195.
- Mitsotakis, D., Synolakis, C. & McGuinness, M. (2017). A modified Galerkin/finite element method for the numerical solution of the Serre-Green-Naghdi system. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 83(10), 755–778.
- Rognes, M. E. & Logg, A. (2013). Automated goal-oriented error control i: Stationary variational problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35(3), C173–C193.