FUNCIONES VECTORIALES Y CURVAS EN EL ESPACIO

Randy Zabaleta M.[1]

Luis R. Fuentes C.[2]

Jeinny M. Peralta P.[3]

Universidad Nacional Abierta y a Distancia —UNAD—

1. Objetivo

En el presente capítulo se pretende que los estudiantes de ingeniería y áreas afines de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD y otras universidades, obtengan los conocimientos necesarios para complementar su formación matemática que utilizarán en su desempeño profesional diario. Este capítulo contiene el material básico de introducción al Álgebra Lineal y elementos del Cálculo Vectorial; propiciando la autonomía del aprendizaje en el estudiante, el cual le brinda las herramientas conceptuales, junto con las soluciones detalladas de ejercicios y problemas, involucrando conceptos previos fundamentales vistos en los cursos de cálculo diferencial y cálculo integral. Como propuesta, queremos que el estudiante no detenga su proceso de aprendizaje por vacíos u obstáculos conceptuales, los cuales posiblemente haya olvidado. Al movilizar todos los conocimientos a través del ejemplo bien detallado, garantizamos una madurez conceptual en las construcciones que se proyectan en los cursos de Álgebra Lineal y Cálculo Vectorial, propuesta que se ha construido con la participación de las redes de tutores en los últimos años en la Escuela de Ciencias Básicas, Tecnología e Ingeniería de la Universidad Nacional Abierta y a Distancia (UNAD).

2. Curvas planas y ecuaciones paramétricas

***Definición* 1**. *(Curva plana). Una curva plana C es un conjunto de puntos (x, y) cuyas coordenadas están dadas por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, en las que f y g son continuas en un intervalo I. A la variable t se le denomina parámetro.*

---

[1] https://orcid.org/0000-0002-3441-2842 / randy.zabaleta@unad.edu.co

[2] https://orcid.org/0000-0002-0310-5858 / luis.fuentes@unad.edu.co

[3] https://orcid.org/0000-0002-1420-486X

***Ejemplo* 1**. *Trace la gráfica de la curva que tiene las ecuaciones paramétricas* $x = t^2$, $y = t^3$ *para* $-1 \leq t \leq 2$.

Solución. *Para solucionar este ejercicio, realizaremos una tabla de valores, ver Cuadro 1, en la que damos valores al parámetro* t *entre* -1 *y* 2*, de manera que iremos obteniendo los pares coordenados para realizar la gráfica respectiva.*

Tabla 1: Tabla de valores para el Ejemplo 1

t	$x = t^2$	$y = t^3$
-1	1	-1
-0.7	0.49	-0.343
-0.4	0.16	-0.064
-0.1	0.01	-0.001
0.2	0.04	0.008
0.5	0.25	0.125
0.8	0.64	0.512
1.1	1.21	1.331
1.4	1.96	2.744
1.7	2.89	4.913
2	4	8

Observando la tabla nos damos cuenta que para cada valor de t *entre -1 y 2 hemos obtenido un par coordenado* (x, y)*, de manera que ya podemos realizar nuestra gráfica (Figura 1). Usando la línea de comandos en Geogebra* $Curva(t^2, t^3, t, -1,2)$.

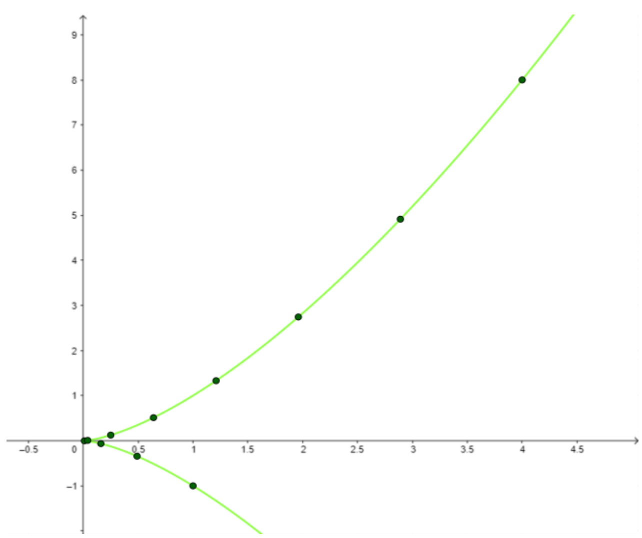


Figura 1: Curva plana del Ejemplo 1.

De la ecuación paramétrica $x = t^2$ despejamos t obteniendo $t = \sqrt{x}$; reemplazando esta expresión en la otra ecuación paramétrica se tiene $y = t^3 = \left(\sqrt{x}\right)^3 = \sqrt{x^3}$ de donde $y = \sqrt{x^3}$ corresponde a la ecuación de la gráfica en función de x, es decir, no parametrizada.

***Ejemplo* 2**. *Encuentre una parametrización para la ecuación de una circunferencia centrada en el origen coordenado con radio r.*

Solución.

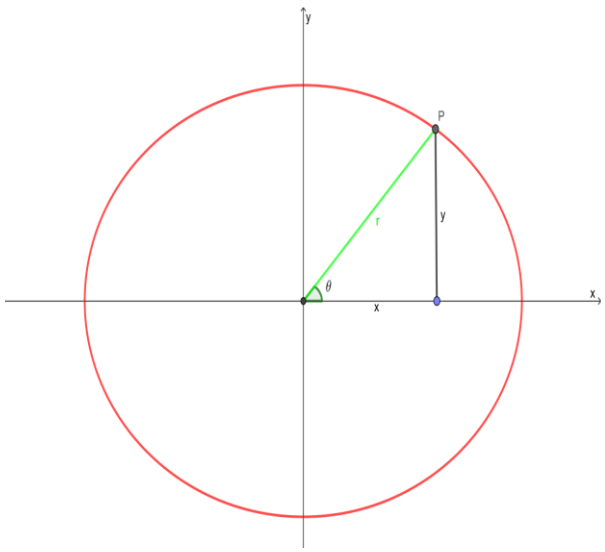


Figura 2: Gráfica de la circunferencia del Ejemplo 2.

Para resolver este ejercicio considere la Figura 2, la cual corresponde al de una circunferencia centrada en el origen y cuyo radio es r. Sabemos que la ecuación de una circunferencia con estas características es dada por $x^2 + y^2 = r^2$, ahora, si consideramos un punto P cualquiera sobre la circunferencia con coordenadas (x, y) y trazamos el radio desde el centro a este punto, como se muestra en la Figura 2, podemos observar que se forma un ángulo θ con respecto al eje x. De esta situación, se deduce que cualquier punto P situado sobre la circunferencia está orientado, por decirlo de alguna manera, en la dirección de un ángulo θ respecto al eje x.

De esta manera, si formamos un triángulo rectángulo con r como hipotenusa, se puede parametrizar la ecuación de la circunferencia en términos de θ, puesto que el radio es fijo. Así, se tiene.

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{x}{r} \rightarrow x = r\cos(\theta) \rightarrow x(\theta) = r\cos(\theta) \\ sen(\theta) &= \frac{y}{r} \rightarrow y = r\backslash\text{sen}(\theta) \rightarrow y(\theta) = r\backslash\text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

De esta forma, hemos encontrado una parametrización para la ecuación de la circunferencia en términos del parámetro θ.

Si se quisiese eliminar la parametrización, entonces utilizamos la ecuación de la circunferencia en términos de x e y y reemplazamos las ecuaciones paramétricas. Así,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(r\cos(\theta)\right)^2 + \left(r\sin(\theta)\right)^2 \\ &= r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta) \\ &= r^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

3. Pendiente de una recta tangente a una curva parametrizada

***Definición* 2**. *(Pendiente de una recta tangente). Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$ las funciones diferenciables que definen a la curva C. La pendiente de una recta tangente a C en un punto x_0 de la curva está dada por $\frac{dy}{dx}$, evaluada en el punto x_0 de C.*

Para calcular esta derivada se calcula Δx y Δy como, $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$ y $\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t)$. Así,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

De modo que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Del mismo modo obtenemos la segunda derivada de y con respecto a x de la curva parametrizada C. Así,

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

4. **Derivadas de orden superior**

$$\frac{d^n(y)}{dx^n} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^{n-1}(y)}{dx^{n-1}}\right]}{\frac{dx}{dt}}$$

Por ejemplo, la derivada de tercer orden de y con respecto a x se notaría

$$\frac{d^3(y)}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2(y)}{dx^2}\right]}{\frac{dx}{dt}}$$

***Ejemplo* 3**. *Obtener la derivada de tercer orden para la curva parametrizada* $x = 4t + 6$, $y = t^2 + t - 2$

Solución. *Para solucionar este problema, vamos a encontrar la primera derivada de esta curva, de esta manera se tiene*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} = \frac{2t+1}{4}$$

Ahora bien, siguiendo la definición para derivadas de orden superior obtenemos la segunda derivada de esta curva parametrizada. Así,

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{2t+1}{4}\right)}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}$$

Por último, para obtener la tercera derivada de esta curva parametrizada volvemos a aplicar la definición para derivadas de orden superior. Así, se tiene

$$\frac{d^3(y)}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

5. **Ejercicios**

1. Usando el programa Geogebra. Trace la gráfica de las siguientes curvas definidas de forma paramétrica por:

    a. $x = -t$, $y = 2t - 1$ para $-3 \leq t \leq 4$.
    b. $x = 2t$, $y = t^2$ para $-2 \leq t \leq 4$.
    c. $x = 3\text{sent}, y = 3\text{cos}t$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.
    d. $x = 2\text{sent}$, $y = 5cost$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.
    e. $x = t$, $y = \text{tan}t\pi$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Encuentre la ecuación perimétrica para la ecuación de las siguientes curvas rectangulares.

   a. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.
   b. $y = 3x - 5$.
   c. $x = y^2$.
   d. $x^2 + y^2 = 16$.

3. Obtener la pendiente de la recta tangente $\frac{dy}{dx}$ de las curvas definidas de forma perimétrica por:

   a. $x = 3t^2 - t, y = 5t + 2$ para $t = 2$.
   b. $x = t^2, y = 2t$ para $t = -5$.
   c. $\mathrm{x} = 3\mathrm{sent}, y = 3\cos t$ para $t = \frac{\pi}{4}$.
   d. $x = t, y = \tan(t\pi)$ para $t = 1$.

4. Determine la segunda $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ y tercera derivada $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$ de las curvas definidas de forma perimétrica por:

   a. $x = 3t^2 - 4, y = t^2 - \frac{5}{t} + 2$.
   b. $x = 4t^4, y = t^5 + 4t^3$.
   c. $x = \cos t,\ y = \cos t$.

5. Longitud de una curva en el plano

***Definición* 3**. *(Longitud de una curva). Si C es una curva parametrizada de manera que $x = f(t), y = g(t)$ para $a \leq t \leq b$, entonces podemos aproximar la longitud de una porción de la curva comprendida en el intervalo $[a, b]$. Si consideramos la curva como una serie de n puntos separados a cierta distancia entre ellos entonces si ubicamos el n-ésimo punto sobre la curva (Q_n) y otros dos puntos cualesquiera sobre ella los cuales denominaremos Q_k y Q_{k-1} como se muestra en la Figura 3, de modo que Q_{k-1} sea el punto anterior a Q_k en esa serie de n puntos, entonces si trazamos un segmento desde Q_{k-1} hasta Q_k que corresponda a la distancia entre estos dos puntos podemos aproximar la longitud de una porción de la curva (no necesariamente la distancia comprendida solamente entre Q_{k-1} y Q_k) si realizamos una sumatoria de todos los segmentos trazados entre dos puntos de la serie de n puntos en dicha porción de la curva. Así,*

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} d\,(Q_{k-1}, Q_k)$$

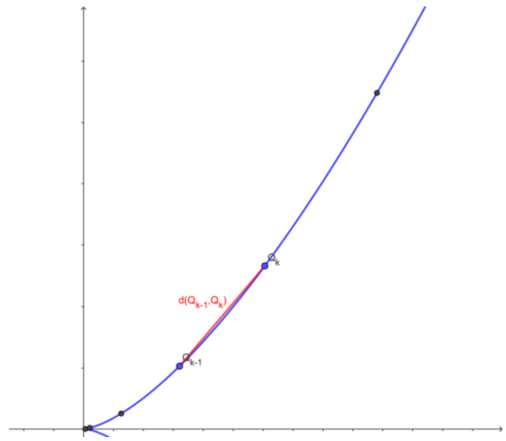


Figura 3: Longitud de una curva en el plano.

Ahora bien, sabemos que Q_{k-1} y Q_k son dos puntos bidimensionales sobre la curva parametrizada C lo que significa que son pares coordenados dados para un respectivo valor del parámetro t, de esta forma Q_k puede escribirse como $Q_k = \left(f(t_k), g(t_k)\right)$ y Q_{k-1} puede escribirse como $Q_{k-1} = \left(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})\right)$. Si aplicamos la fórmula de distancia entre dos puntos vista anteriormente se tiene

$$d(Q_{k-1}, Q_k) = \sqrt{\left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right)^2 + \left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right)^2}$$

De esta forma se tiene

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f(t_k) - f(t_{k-1})\right)^2 + \left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right)^2}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que una curva parametrizada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para $a \leq t \leq b$ se considera alisada o suave si $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas en $[a, b]$ y no son simultáneamente nulas en dicho intervalo, entonces si tomamos una variación del parámetro t para los puntos Q_{k-1} y Q_k se tiene

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$$

Ahora, si consideramos el intervalo como una gran serie de puntos, de manera que los puntos Q_{k-1} y Q_k queden lo más cerca posible entre ellos, con la intención de reducir el margen de error al momento de calcular la distancia entre ellos, significa que el valor del parámetro que da origen al punto Q_{k-1} y el valor del parámetro que da origen al punto Q_k están muy cercanos en términos de valor. Si atendemos a este razonamiento entonces se deduce que, si reducimos significativamente la variación del parámetro para los puntos Q_{k-1} y Q_k, de modo que se haga casi cero, obtendríamos una considerable reducción del margen de error al momento de calcular la longitud de la curva en un intervalo determinado. Matemáticamente esto sería

$$\Delta t_k \Rightarrow 0$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = 0 \Rightarrow t_k = t_{k-1}$$

Ahora, tomaremos un valor del parámetro que origine un punto sobre la curva exactamente en la mitad de los puntos Q_{k-1} y Q_k. A este valor de t lo llamaremos t_{k*} y originará un punto Q_{k*} sobre la curva y en la mitad de Q_{k-1} y Q_k. Aplicando el teorema del valor medio se tiene

$$\begin{aligned} f'(t_{k*}) &= \frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}} \Rightarrow f'(t_{k*})\cdot(t_k-t_{k-1}) = f(t_k)-f(t_{k-1}) \\ g'(t_{k*}) &= \frac{g(t_k)-g(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}} \Rightarrow g'(t_{k*})\cdot(t_k-t_{k-1}) = g(t_k)-g(t_{k-1}) \end{aligned}$$

Sabiendo que $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$, podemos reemplazar las expresiones $f(t_k)-f(t_{k-1})$ y $g(t_k)-g(t_{k-1})$ en la expresión de sumatoria de la parte superior. Así, se tiene

$$\begin{aligned} S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f(t_k)-f(t_{k-1})\right)^2 + \left(g(t_k)-g(t_{k-1})\right)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\cdot(t_k-t_{k-1})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\cdot(t_k-t_{k-1})\right)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(f'(t_{k*})\cdot\Delta t_k)^2 + (g'(t_{k*})\cdot\Delta t_k)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\right)^2\cdot(\Delta t_k)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2\cdot(\Delta t_k)^2} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta t_k)^2\cdot\left(\left(f'(t_{k*})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2\right)} \\ S &\approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2}\cdot\Delta t_k \end{aligned}$$

Ahora, para lograr un valor exacto y no aproximado de la longitud de la curva en el intervalo, debemos hacer tender a 0, como mencionamos anteriormente, el valor de la variación del parámetro t, de manera que reduzcamos la longitud de la distancia entre los puntos hasta el extremo de que podamos cubrir totalmente la porción de la curva a la cual queremos determinar la longitud, de esta manera se tiene

$$S = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(f'(t_{k*})\right)^2 + \left(g'(t_{k*})\right)^2}\cdot\Delta t_k$$

Así, tenemos una forma de la integral de Riemann, de manera que esta última expresión se puede escribir como

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2}\cdot\, dt$$

***Ejemplo* 4**. *Encuentre la longitud de la curva dada por $x = 4t$ y $y = t^2$ para $0 \le t \le 2$*

Solución. *Para solucionar este problema debemos hallar las primeras derivadas de las ecuaciones paramétricas respecto a* t*. Así,*

$$\begin{aligned} x &= 4t \Rightarrow \frac{dx}{dt} = f'(t) = 4 \\ y &= t^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = g'(t) = 2t \end{aligned}$$

Ahora que se han obtenido las primeras derivadas aplicamos la fórmula para determinar la longitud de arco que se demostró anteriormente, de esta manera se tiene

$$S = \int_0^2 \sqrt{4^2 + (2t)^2} \cdot \, dt$$

Ya sabemos que la longitud S *de la curva para* $0 \leq t \leq 2$ *se obtendrá calculando esta integral, entonces*

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \sqrt{4^2 + (2t)^2} \cdot \, dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2} \cdot \, dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{4(4 + t^2)} \cdot \, dt \\ &= \int_0^2 2\sqrt{4 + t^2} \cdot \, dt \\ &= 2\int_0^2 \sqrt{4 + t^2} \cdot \, dt \end{aligned}$$

Llegados a este punto y revisando la integral que nos ha quedado, nos damos cuenta que no nos sirve una técnica de sustitución, ni tampoco podemos aplicar el método de integración por partes, sin embargo, vemos que el integrando podemos sustituirlo de forma trigonométrica, pues tenemos la raíz de la suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo, como se observa en la Figura 4, es decir la expresión que representa la hipotenusa de dicho triángulo. Al ser la suma de los cuadrados de los catetos podemos sustituir utilizando las funciones trigonométricas tangente y secante.

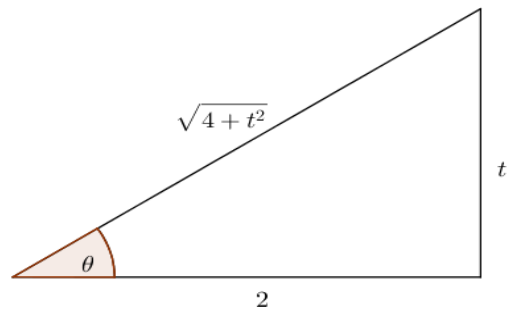


Figura 4: Triángulo rectángulo con *hipotenusa* $\sqrt{4+t^2}$.

Como se mencionó anteriormente, si imaginamos un triángulo rectángulo como el de la Figura 4, podemos sustituir los catetos del triángulo por las raíces de los términos dentro de la raíz del integrando y por ende la hipotenusa es la expresión completa en el integrando. Ahora bien, aplicando las razones tangente y secante se tiene

$$\tan(\theta) = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2\tan(\theta)$$
$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{4+t^2}}{2} \Rightarrow \sqrt{4+t^2} = 2\sec(\theta)$$

Ahora bien, como estamos pasando todo a términos de θ debemos encontrar una expresión del diferencial de t en términos de un diferencial de θ para ello utilizaremos la expresión que obtuvimos al aplicar la razón tangente y derivaremos t con respecto a θ, de esta manera se tiene

$$t = 2\tan(\theta) \Rightarrow \frac{dt}{d\theta} = 2sec^2(\theta) \Rightarrow dt = 2\sec^2(\theta)d\theta$$

También, debemos tener en cuenta que como estamos cambiando el parámetro, es decir, estamos pasando de t a θ, el intervalo de integración también debe cambiar; para encontrar el cambio en los límites de integración volveremos a utilizar la expresión obtenida al aplicar la razón tangente y veremos que valores adquiere θ cuando $t = 0$ y $t = 2$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} t &= 2\tan(\theta) \to t = 0 \Rightarrow 0 = 2\tan(\theta) \Rightarrow \frac{0}{2} = \tan(\theta) \\ 0 &= \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \arctan(0) \Rightarrow \theta = 0 \\ t &= 2\tan(\theta) \to t = 2 \Rightarrow 2 = 2\tan(\theta) \Rightarrow \frac{2}{2} = \tan(\theta) \\ 1 &= \tan(\theta) \Rightarrow \theta = \arctan(1) \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

De esta forma se concluye que si se realiza un cambio de t a θ, entonces si $0 \leq t \leq 2$ se tiene $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Por último, reemplazamos todo en la integral. Así,

$$2\int_0^2 \sqrt{4+t^2}\cdot dt$$

Se realiza sustitución trigonométrica.

$$2\int_0^2 \sqrt{4+t^2}\cdot dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sec(\theta)\cdot\ 2\sec^2(\theta)d\theta$$
$$2\int_0^2 \sqrt{4+t^2}\cdot dt = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(\theta)\cdot\ \sec^2(\theta)d\theta$$

Llegados a esta integral vamos a aplicar el método de integración por partes para la integral indefinida, para ello sea

$$\begin{aligned} u &= \sec(\theta) \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sec(\theta)\tan(\theta) \Rightarrow du = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\ dv &= \sec^2(\theta)d\theta \Rightarrow \int dv = \int \sec^2(\theta)d\theta \Rightarrow v = \tan(\theta) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \tan(\theta)\cdot\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\
&\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \tan^2(\theta)\cdot\sec(\theta)d\theta \\
&\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int (\sec^2(\theta)-1)\cdot\sec(\theta)d\theta \\
&\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \left(\sec^3(\theta)-\sec(\theta)\right)\cdot d\theta \\
&\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta)d\theta + \int \sec(\theta)d\theta \\
&\int \sec^3(\theta)d\theta + \int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta)d\theta \\
&2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

Ahora bien, para resolver la integral de $\sec(\theta)$ *que nos ha quedado en el miembro derecho vamos a multiplicar y dividir el integrando por la expresión* $\sec(\theta)+\tan(\theta)$*, de esta forma nos queda*

$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \sec(\theta)\cdot\frac{\sec(\theta)+\tan(\theta)}{\sec(\theta)+\tan(\theta)}\cdot d\theta$$
$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \frac{\sec^2(\theta)+\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sec(\theta)+\tan(\theta)}\cdot d\theta$$

Ahora podemos aplicar la técnica de sustitución, para ello sea

$$u = \sec(\theta)+\tan(\theta) \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = \sec(\theta)\tan(\theta)+\sec^2(\theta)$$

$$du = \big(\sec(\theta)\tan(\theta) + \sec^2(\theta)\big)d\theta$$

Reemplazando se tiene:

$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = \sec(\theta)\tan(\theta) + \int \frac{1}{u}\cdot du$$

$$\begin{aligned}
2\int \sec^3(\theta)d\theta &= \sec(\theta)\tan(\theta) + \ln(u) \\
&= \sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta) + \tan(\theta)\big) \\
\int \sec^3(\theta)d\theta &= \frac{\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta) + \tan(\theta)\big)}{2} \\
8\int \sec^3(\theta)d\theta &= 8\cdot\frac{\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta) + \tan(\theta)\big)}{2} \\
&= 8\int \sec^3(\theta)d\theta = 4\cdot\Big(\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta) + \tan(\theta)\big)\Big)
\end{aligned}$$

Por último, volviendo a definir la integral para el intervalo de variación del parámetro se tiene

$$8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3(\theta)d\theta = \Big[4\cdot\Big(\sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\big(\sec(\theta) + \tan(\theta)\big)\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = 9.1823$$

Para llegar a este resultado se aplicó el teorema fundamental del cálculo, es decir se realizó la diferencia del resultado de la integral evaluado en el límite superior menos el resultado de la integral evaluado en el límite inferior y esa es la longitud de la curva que se pide en el problema.

Ejercicios:

1. Determine la longitud de arco de la curva $x = sent$, $y = \cos t$ en el intervalo:
   a. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.
   b. $[0, \pi]$.
2. Determine la longitud de arco de la curva $x = 3t^2$, $y = 2t^3$ en el intervalo [1,9].
3. Determine la longitud de arco de la curva $x = t^3$, $y = t^2$ en el intervalo [0,9].

6. **Sistema de coordenadas polares**

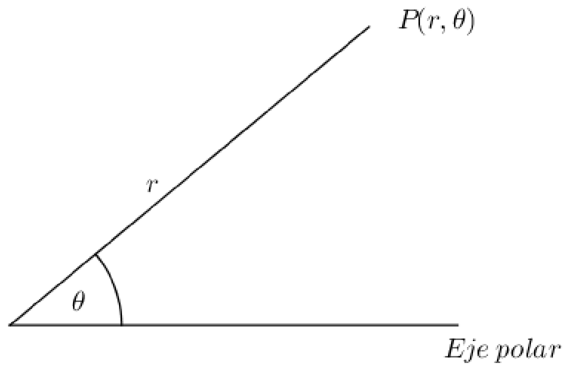


Figura 5: coordenadas polares.

Convenciones:

1. Los ángulos positivos ($\theta > 0$) se miden en sentido contrario al de las manecillas del reloj partiendo del eje polar, en tanto que los ángulos negativos ($\theta < 0$) se miden en el mismo sentido a las manecillas.

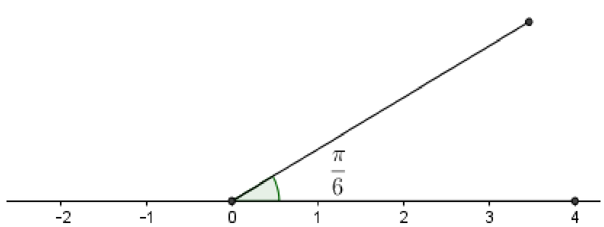
2. Para ubicar un punto $(-r, \theta)$, $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rango $\theta + \pi$.

3. Las coordenadas del polo son $(0, \theta)$; θ es cualquier ángulo.

***Ejemplo* 5**. *Localizar los puntos en el plano polar, cuyas coordenadas polares son:*

$$a.\left(4, \frac{\pi}{6}\right) \qquad b.\left(2, -\frac{\pi}{4}\right) \qquad c.\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Solución. *En las coordenadas polares la representación de un punto en el plano polar no es única, $(-r, \theta)$ y $(-r, \theta + 2\pi n)$ coinciden para $n \in \mathbb{Z}$ o son equivalente mientras que en coordenadas rectangulares si es única.*



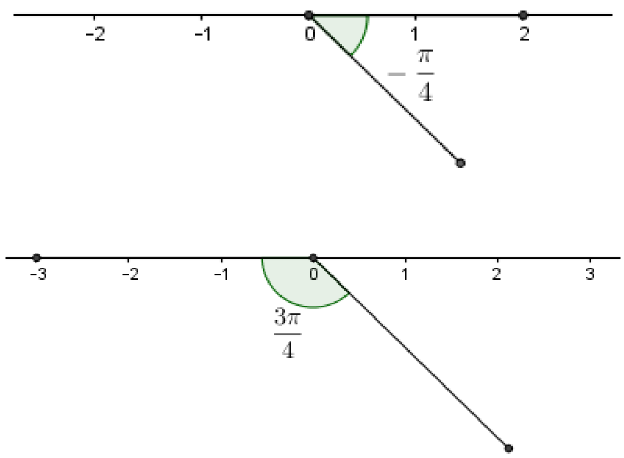


Figura 6: puntos en el plano polar.

7. Conversión de coordenadas polares a rectangulares

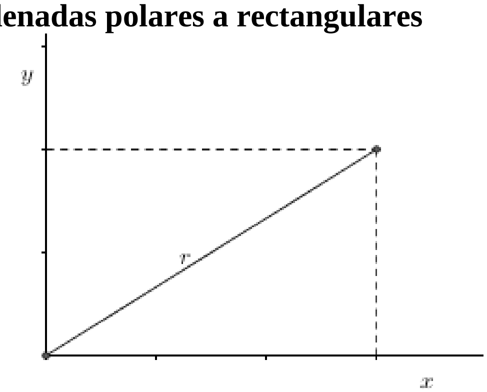


Figura 7: conversión de coordenadas polares a rectangulares.

Usando la relación de Pitágoras y las relaciones trigonométricas sobre un triángulo rectángulo tenemos:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$sen\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = rsen\theta$$
$$\cos\ \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\ \theta$$
$$\tan\ \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Convierta $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ de coordenadas polares a rectangulares.

$$y = 2sen\frac{\pi}{6} \Rightarrow y = 1$$

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$P\left(\sqrt{3}, 1\right)$$

$$(-1,1)$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) \Rightarrow \theta = -45; \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left(\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$$

Usando el cambio de coordenadas, una ecuación cartesiana puede expresarse a menudo como una ecuación polar $r = f(\theta)$.

***Ejemplo* 6**.

1. *Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que:* $x^2 + y^2 = 4y$.

Solución.

$$x^2 + y^2 = 4y$$

$$(r\cos\ \theta)^2 + (rsen\theta)^2 = 4(rsen\theta)$$

$$r^2(\cos^2\ \theta + r^2(sen^2\theta) = 4rsen\theta \qquad \$\$$$

$$r^2 = 4rsen\theta$$

$$6r^2 - 4rsen\theta = 0 \Rightarrow r(r - 4sen\theta) = 0$$

$$r = 0 \quad \text{o} \quad r = 4sen\theta$$

2. *Obtener una ecuación polar que tenga la misma gráfica que:* $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución.

$$r^2\cos^2\ \theta = 8(2 - rsen^2\theta)$$

$$r^2(1 - sen^2\theta) = 16 - 8rsen\theta \; \$\$$$

$$r^2 = (rsen\theta)^2 - 8rsen\theta + 16$$

$$r = (rsen\theta - 4)^2$$

Ejemplo 7*. Determine la ecuación en coordenadas cartesianas de la curva en coordenadas polares* $r^2 = 9\cos 2\theta$

Solución. *Como se tiene que*

$$\cos\ 2\alpha = \cos^2\ \alpha - sen^2\alpha$$

$$\cos\ \theta = \frac{x}{r} \qquad y \qquad sen\theta = \frac{y}{r}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Reemplazando obtenemos:

$$x^2 + y^2 = 9(\cos^2\ \theta - sen^2\theta)$$

$$x^2 + y^2 = 9(\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2})$$

$$x^2 + y^2 = 9(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2})$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$$

Ejercicios:

1. Convierta de coordenadas polares a coordenadas rectangulares los siguientes puntos:

   a. $\left(\frac{3\pi}{2}, 3\right)$
   b. $\left(-\frac{\pi}{4}, 5\right)$
   c. $(0,4)$

2. Convierta de coordenadas rectangulares a coordenadas polares los siguientes puntos:

   a. $(-2,2)$
   b. $(3,4)$
   c. $(0, -4)$

3. Determinar una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la curva en coordenadas rectangulares:

   a. $4x^2 + 9y^2 = 36$
   b. $y = 3x - 1$
   c. $y = x^2 - 2$

4. Determinar una curva en coordenadas rectangulares que tenga la misma gráfica que la curva en coordenadas polares:

   a. $r = 4$
   b. $r = 4\cos\theta$
   c. $r^2 = 2sen\theta - 1$

8. Área en coordenadas polares

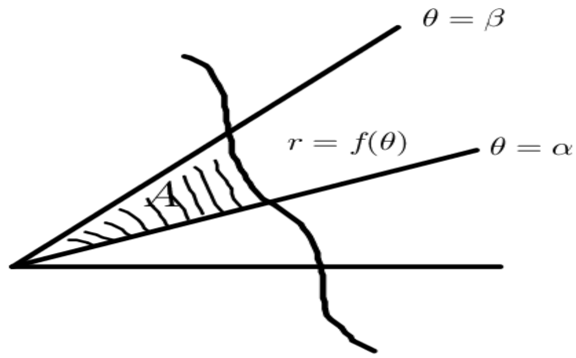


Figura 8: área en coordenadas polares.

Como sabemos que el área de un sector circular viene dada por $A_0 = \frac{1}{2}\theta r^2$. Se tiene que el área de la curva en coordenadas polares entre $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ viene dada por la suma de las áreas de los k-ésimos sectores circulares.

$$\begin{aligned}
A &\approx \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \Delta\theta_k \,.\, r^2 \\
&\Delta\theta_k \to 0 \\
A &= \lim_{\Delta\theta_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \quad \frac{1}{2} \Delta\theta_k . r^2 \\
A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \big(f(\theta)\big)^2 . \, d\theta
\end{aligned}$$

9. Longitud de arco para gráficas polares

En este apartado abordaremos el concepto de longitud de arco de una curva en coordenadas polares, recordemos que la curva en coordenadas cartesianas viene dada por:

$$x = f(t) \qquad y \qquad y = g(t)$$

y la longitud de arco viene dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\, dt$$

Supongamos que f'(θ) tiene derivada continua y $\alpha \leq \theta \leq \beta$, dada una curva parametrizada y $r = f(\theta)$ se tienen las siguientes relaciones

$$x = r\cos\,\theta \quad ; \quad y = rsen\theta$$

$$x = f(\theta)\cos\,\theta \mid y = f(\theta)sen\theta$$

Derivando x y y con respecto a θ obtenemos:

$$\frac{dx}{d\theta} = (f(\theta)\cos\,\theta)' \qquad \mid \qquad \frac{dy}{d\theta} = (f(\theta)sen\theta)'$$

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\,\theta - f(\theta)\text{sen}\theta \qquad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\text{sen}\theta + f(\theta)\cos\,\theta$$

Sumando $\frac{dx}{d\theta}$ y $\frac{dy}{d\theta}$ y elevando al cuadrado:

$$(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 = (f'(\theta)\cos\,\theta - f(\theta)sen\theta)^2 + (f'(\theta)sen\theta + f(\theta)\cos\,\theta)^2$$

$$(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 = (f'(\theta))^2\cos^2\,\theta - 2f'(\theta)f(\theta)\cos\,\theta sen\theta + (f(\theta))^2sen^2\theta + (f'(\theta))^2sen^2\theta$$
$$+2f'(\theta)f(\theta)\cos\,\theta sen\theta + (f(\theta))^2\cos^2\,\theta = (f'(\theta))^2 + (f(\theta))^2$$

Así, obtenemos la longitud de arco en coordenadas polares

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta.$$

***Ejemplo* 8**. *Determine la longitud de la curva relacionada a continuación*

$r = 2 - 2\cos\theta$

$0 \leq \theta \leq \pi$

Solución. *En efecto, usando la fórmula de la longitud de arco en coordenadas polares tenemos*

$$\text{S} = \int_0^{\pi} \sqrt{\left(\frac{d}{d_\theta}(2 - 2\cos\theta)\right)^2 + (2 - 2\cos\theta)^2}\,.\,d\theta$$

$$\text{S} = \int_0^{\pi} \sqrt{(2\text{sen}\theta)^2 + (2 - 2\cos\theta)^2}\,.\,d\theta$$

$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{4sen^2\theta+4-8\cos\ \theta+4\cos^2\ \theta}\,.d\theta$$
$$S=\int_0^{\pi}\sqrt{4(sen^2\theta+1-2\cos\ \theta+\cos^2\ \theta)}\,.d\theta$$
$$S=2\int_0^{\pi}\sqrt{2-2\cos^2\ \theta}\,.d_\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1-\cos\ \theta)}\,.d\theta$$
$$S=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos\ \theta}\,.d\theta$$
$$S=2\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{2sen\frac{\theta}{2}}\,.d\theta$$
$$S=2\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sqrt{sen^2\frac{\theta}{2}}\,.d\theta$$

$Integrar:\ Sea\ u=\frac{\theta}{2}\Rightarrow\frac{du}{d\theta}=\frac{1}{2}\Rightarrow d\theta=2du$

$$S=8\int_0^{\pi}senu\,.du$$
$$S=8(-\cos\ u)]_0^{\pi}$$
$$S=\left[-8\cos\ \frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}\Rightarrow[(-8\cos\ \frac{\pi}{2})-(-8\cos\ 0)]=8$$

Ejercicios:

1. Calcule el área encerrada por la curva $r=4$, con $0\leq\theta\leq\pi$
2. Determine el área encerrada por la curva $r^2=9\cos\theta$, con $\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$
3. Determine el área encerrada por la curva $r=2\cos3\theta$, con $\frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$
4. Determine el área encerrada por la curva $r=2-2sen\theta$, con $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{6}$
5. Determine la longitud de las curvas relacionadas a continuación:
   a. $r=3-3sen\theta$
      $0\leq\theta\leq2\pi$
   b. $r=2\cos\theta$
      $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

10. Funciones vectoriales y curvas en el espacio. Derivadas e integrales de funciones vectoriales

10.1 Funciones vectoriales

***Definición* 4**. *(Curva parametrizada). Sabemos que una curva* C *en el plano* xy *se puede parametrizar por medio de* $x = f(t)$ $y = g(t)$, *con* $a \leq t \leq b$, *es común representarla como sigue:*

$$r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}}$$

Se dice que una función vectorial en $\mathbb{R}^3$ puede ser parametrizada como

$$r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$$

Para cierto número dado t_0, el vector $r(t_0)$ es el vector de posición de un punto P de la curva C.

***Ejemplo* 9**. *Trazar la gráfica correspondiente a las siguientes funciones vectoriales.*

1. $r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}; \qquad t \geq= 0$

2. $r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

Solución.

1. $r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}; \qquad t \geq= 0$

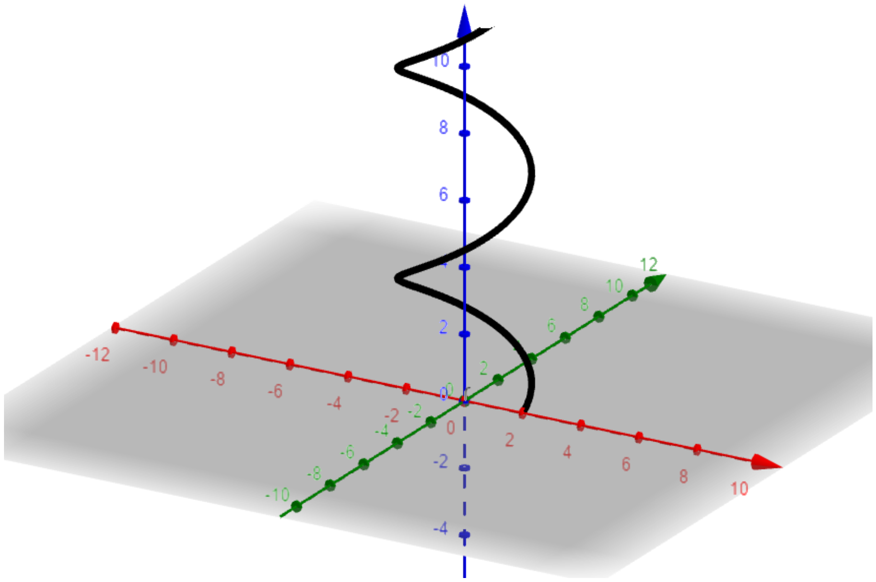


Figura 9: gráfica de la curva $r(t) = 2cos\ t\hat{\boldsymbol{i}} + 2sent\hat{\boldsymbol{j}} + t\hat{\boldsymbol{k}}$.

2. $r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$

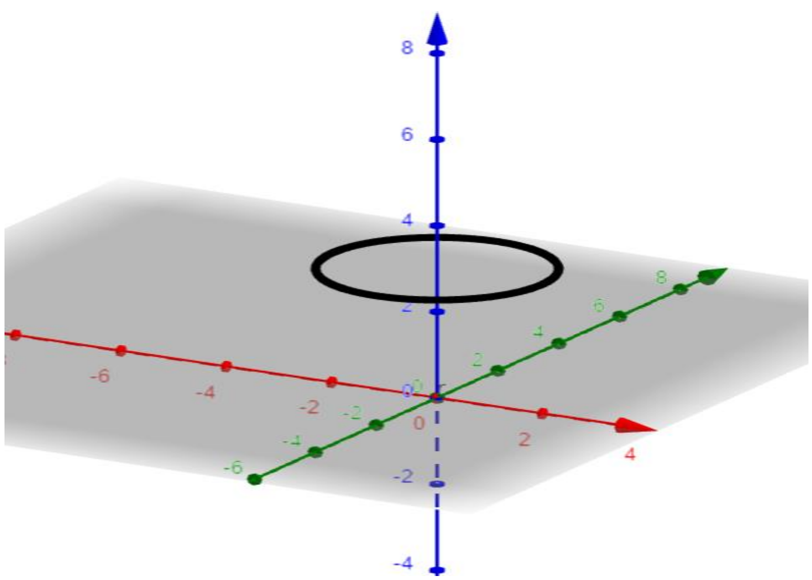


Figura 10: gráfica de la curva $r(t) = 2cos\ t\hat{\boldsymbol{i}} + 2sent\hat{\boldsymbol{j}} + 3\hat{\boldsymbol{k}}$

1.

10.2 Cálculo de funciones vectoriales

Abordaremos los conceptos fundamentales del cálculo de funciones vectoriales, consideremos que los siguientes limites si existen: $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$ y que $r(t) = \big(f(t), g(t), h(t)\big)$ entonces para establecer el límite de una función vectorial lo evaluamos como sigue:

$$\lim_{t\to a} r(t) = \left(\lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right).$$

***Teorema* 1**. *Si* $\lim_{t\to a} r_1(t) = L_1$ *y* $\lim_{t\to a} r_2(t) = L_2$ *entonces se cumple que:*

a. $\lim_{t\to a} c r_1(t) = cL_1$, *donde c es un escalar.*

b. $\lim_{t\to a} [r_1(t) + r_2(t)] = L_1 + L_2$

c. $\lim_{t\to a} [r_1(t). r_2(t)] = L_1 . L_2$

***Definición* 5**. *(Función continua). Se dice que una función vectorial r es continua en un número sí:*

a. $r(a)$ *está definida.*

b. $\lim_{t\to a} r(t)$ *existe.*

c. $\lim_{t\to a} r(t) = r(a)$.

De forma equivalente, $r(t)$ es continua en un numero **a** si y solo si las componentes f, g y h son continuas en **a**.

10.3 Derivadas de funciones vectoriales

***Definición* 6**. *(Derivada). La derivada de una función vectorial* r *se define como:*

$$r'(t) = \lim_{\Delta_t \to 0} \frac{1}{\Delta t} [r(t + \Delta t) - r(t)]$$

***Teorema* 2**. *Si* $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ *donde* f, g *y* h *son diferenciales, entonces:*

$$r'(t) = \big(f'(t), g'(t), h'(t)\big)$$

10.4 Curvas alisadas

***Definición* 7**. *(Función alisada.) Se dice que r es una función alisada y la curva descrita por r es una curva alisada. Si r tiene las primeras derivadas continuas y* $r'(t) \neq 0$*, para todo t en un intervalo I.*

***Ejemplo* 10**. *Obtener ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva* C_1 *cuyas ecuaciones paramétricas son:*

$$x = t^2, \quad y = t^2 - t, \quad z = -7t; \text{ en } t = 3, \quad t = 7$$

Solución. *La recta tangente a la curva determinada por* $r(t) = (t^2, t^2 - t, -7t)$*, en el punto* P_0*, es la recta paralela a* $r\,'(t_0)$ *que pasa por* P_0 *es* $P_0 + tr'(t_0)$.

Luego, en $t = 3, \quad t = 7$ *tenemos*

$$\begin{aligned} r(3) &= (3,6,-21) \\ r(7) &= (49,42,-49) \\ r'(t) &= (2t, 2t-1, -7) \\ r'(3) &= (6,5,-7) \\ r'(7) &= (14,13,-7) \end{aligned}$$

Para t=3, la recta tangente a la curva pasa por $P_0 = (3,6,-21)$ *y es paralela a* $r'(3) = (6,5,-7)$ *es*

$$L_1: \{x = 3 + 6t; \quad y = 6 + 5t; \quad z = -21 - 7t\}.$$

Para t=7, la recta tangente a la curva pasa por $P_0 = (49,42,-49)$ *y es paralela a* $r'(7) = (14,13,-7)$ *es*

$$L_1: \{x = 49 + 14t; \quad y = 42 + 13t; \quad z = -49 - 7t\}.$$

***Definición* 8**. *(Derivadas de orden superior) Las derivadas de orden superior se obtienen derivando sus componentes esto es:*

$$\begin{aligned} r''(t) &= \big(f''(t), g''(t), h''(t)\big) \\ r'''(t) &= \big(f'''(t), g'''(t), h'''(t)\big) \end{aligned}$$

$$r^n(t) = \big(f^n(t), g^n(t), h^n(t)\big)$$

***Teorema* 3**. *(Regla de la cadena). Si* r *es una función vectorial diferenciable y* $s = u(t)$ *es una función escalar diferenciable entonces la derivada de* $r(s)$ *con respecto a* t *es:*

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{ds}\frac{ds}{dt} = r'(s)u'(t).$$

***Ejemplo* 11**. *Aplicar la regla de la cadena para encontrar* $r'(t)$ *si*

$r(s) = \cos\ 2s\hat{\mathbf{i}} + sen2s\hat{\mathbf{j}} + e^{3s}\hat{\mathbf{k}}$ *y* $s = t^4$.

Solución. *Podemos escribir* $r(t)$ *de la siguiente forma:*

$$r(t) = (\cos(2t^4), sen(2t^4), e^{3t^4}).$$

Así,

$$\frac{dr}{dt} = r'(s)u'(t).$$

$$\frac{dr}{dt} = (-2sen(2u), 2cos(2\mathrm{u}), 3e^{3\mathrm{u}})4t^3$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(-8t^3 sen(2t^4), 8t^3 \cos 2t^4, 12t^3 e^{3t^4}\right).$$

***Teorema* 4**. *Sean* r_1, r_2 *funciones vectoriales diferenciables y* $u(t)$ *una función escalar diferenciable, entonces:*

- $\frac{d}{dt}[r_1(t) + r_2(t)] = r_1{}'(t) + r_2{}'(t)$
- $\frac{d}{dt}[u(t)r_1(t)] = u(t)r_1{}'(t) + u'(t)r_1(t)$
- $\frac{d}{dt}[r_1(t).r_2(t)] = r_1(t)r_2{}'(t) + r_1{}'(t)r_2(t)$
- $\frac{d}{dt}[r_1(t) \times r_2(t)] = r_1(t) \times r_2{}'(t) + r_1{}'(t) \times r_2(t)$

10.5 Integrales de funciones vectoriales

***Definición* 9**. *(Integral de una función). Si* f, g *y* h *son funciones integrables, entonces las integrales indefinidas y definidas de una función vectorial* $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ *se definen respectivamente como:*

$$\begin{aligned} \int r(t).dt &= \int f(t).dt\hat{\mathbf{i}} + \int g(t).\mathrm{dt}\hat{\mathbf{j}} + \int h(t).\mathrm{dt}\hat{\mathbf{k}} \\ \int_a^b r(t).dt &= \int_a^b f(t).dt\hat{\mathbf{i}} + \int_a^b g(t).dt\hat{\mathbf{j}} + \int_a^b h(t).dt\hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

La integral definida de $r(t)$ es otro vector $R(t) + C$ tal que $R'(t) = r(t)$.

***Ejemplo* 12**. *Obtener la integral indefinida para*

$$r(t) = 6t^2\hat{\mathbf{i}} + 4e^{-2t}\hat{\mathbf{j}} + 8\cos 4t\hat{\mathbf{k}}$$

Solución.

$$\int r(t).dt = 6\int t^2.dt\hat{\mathbf{i}} + 4\int e^{-2t}.dt\hat{\mathbf{j}} + 8\int \cos\ 4t.dt\hat{\mathbf{k}}$$
$$\int r(t).dt = (\frac{6}{3}t^3 + C_1, \frac{-4}{2}e^{-2t} + C_2, \frac{8}{4}sen4t + C_3)$$
$$\int r(t).dt = (2t^3 + C_1, -2e^{-2t} + C_2, 2sen4t + C_3)$$

Ejercicios:

1. Trazar la gráfica correspondiente a las funciones vectoriales indicadas.

   a. $r(t) = 9\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 16sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}\,;\quad t \geq 0$

   b. $r(t) = 2t\hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}};\quad t \geq 0$

   c. $r(t) = e^t\hat{\mathbf{i}} + t\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}};\quad t \geq 0$

2. Calcular los siguientes límites de las siguientes funciones vectoriales, si existen:

   a. $\lim_{t\to 2}\left[(t^2 - 2)\hat{\mathbf{i}} + (3t + 1)\hat{\mathbf{j}} + e^t\hat{\mathbf{k}}\right]$

   b. $\lim\limits_{t\to 0}\left[\frac{sent}{t}\hat{\mathbf{i}} + \frac{(1-\cos t)}{t}\hat{\mathbf{j}} + (1+t)^{\frac{1}{t}}\hat{\mathbf{k}}\right]$

   c. $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{(t^2-2t)}{(2t^2+3)}\hat{\mathbf{i}} + (5t^{-3} + 2))\hat{\mathbf{j}} + e^{\frac{-1}{t}}\hat{\mathbf{k}}\right]$

3. Calcular las derivadas de las siguientes funciones vectoriales, si existen:

   a. $r(t) = (t^5 - 2t^3)\hat{\mathbf{i}} + \frac{(3t+1)}{(t+2)}\hat{\mathbf{j}} + e^{-3t}\hat{\mathbf{k}}$

   b. $b.r(t) = sent\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{(\tan t + \sec t)}{(1-\cos t)}\,\hat{\mathbf{j}} + \ln(4t^3 - 2t^2)\,\hat{\mathbf{k}}$

   c. $r(t) = e^{\ln\left(\cos^2(3t-1)\right)}\hat{\mathbf{i}} + \sec\frac{(t^3+2)}{(t^2+2t)}\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$

4. Obtener ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = \cos\ t,\ \ y = sent,\ \ z = t$$

5. Aplicar la regla de la cadena para encontrar $r'(t)$ si

$$r(s) = \cos^2(s)\hat{\mathbf{i}} + sen^2(s)s\hat{\mathbf{j}} + ln(s^2 - s)\hat{\mathbf{k}} \quad \text{y } s = 3t^2.$$

6. Obtener la integral indefinida para

$$r(t) = 6t^2\hat{\mathbf{i}} + 4e^{-2t}\hat{\mathbf{j}} + 8\cos 4t\hat{\mathbf{k}}$$

11. Longitud de arco y curvatura. Movimiento en el espacio, velocidad y aceleración

11.1 Longitud de una curva en el espacio

***Definición* 10**. *(Longitud de una curva alisada). Si $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$ es una función alisada, la longitud de la curva alisada está dada por:*

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(f'(t)\right)^2 + \left(g'(t)\right)^2 + \left(h'(t)\right)^2}\, dt = \int_o^b |r'(t)|\, dt$$

***Ejemplo* 13**. *Encuentre la longitud de la curva.*

$$r(t) = 2\cos t\,\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}; \quad 0 \leq t \leq 3$$

Solución.

$$r(t) = 2\cos t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$
$$f'(t) = -2sent$$
$$g'(t) = 2\cos t$$
$$h'(t) = 1$$

Luego, la longitud de la curva viene dada por

$$S = \int_0^3 \sqrt{(-2sent)^2 + (2\cos\ t)^2 + 1^2}\, dt$$
$$S = \int_0^3 \sqrt{4(sen^2 t + \cos^2\ t) + 1}\, dt$$
$$S = \int_0^3 \sqrt{5}\, dt$$
$$S = [\sqrt{5}t]_0^3 = [\sqrt{5}(3)] - 0 = 6{,}71u$$

***Ejemplo* 14**. *Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una hélice circular en* $\mathbb{R}^3$ *de tal modo que su vector posición en el tiempo* t *es* $r(t) = (4\cos\ \pi)\hat{\mathbf{i}} + (4sen\pi t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$ *encuentre la distancia recorrida y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo* $1 \leq t \leq 5$

Solución. Tenemos que la curva es

$$r(t) = (4\cos\ \pi t)\hat{\mathbf{i}} + (4sen\pi t)\hat{\mathbf{j}} + t\hat{\mathbf{k}}$$

$$f'(t) = -4\pi sen(\pi t)$$

$$g'(t) = 4\pi cos(\pi t)$$

$$h'(t) = 1$$

Luego, la longitud de la curva viene dada por

$$S = \int_1^5 \sqrt{(-4\pi sen(\pi t))^2 + (4\pi cos(\pi t))^2 + 1}\, dt$$

$$\boldsymbol{S = \int_1^5 \sqrt{16\pi^2 sen^2(\pi t) + 16\pi^2 \cos^2\ (\pi t) + 1}\, dt}$$

$$\boldsymbol{S = \int_1^5 \sqrt{16\pi^2(1) + 1}\, dt}$$

$$\boldsymbol{S = 50{,}43}$$

11.2 Movimiento sobre una curva

***Definición* 11**. *(Velocidad y aceleración). Supongamos que una partícula describe una trayectoria* C *y su posición esta indicada por:*

$$r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

donde t es el tiempo. Si f, g y h tienen segunda derivada, entonces la velocidad está dada por:

$$v(t): r'(t) = f'(t)\hat{\mathbf{i}} + g'(t)\hat{\mathbf{j}} + h'(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

y la aceleración por:

$$a(t): r''(t) = f''(t)\hat{\mathbf{i}} + g''(t)\hat{\mathbf{j}} + h''(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

La rapidez de la partícula es una función escalar: $v = |v(t)|$ o $s'(t) = |v(t)|$ dado que

$$S = \int_{to}^{t} |v(t)|\, dt.$$

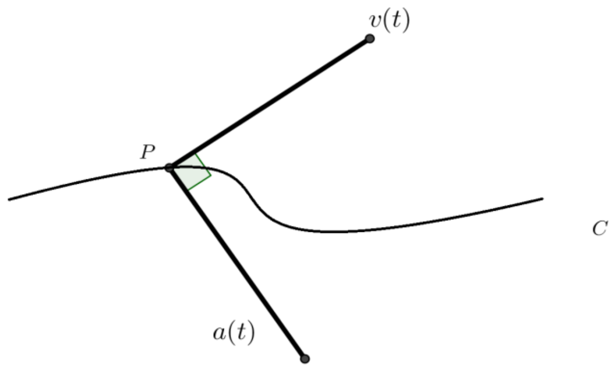


Figura 11: movimiento sobre una curva.

Si una partícula se mueve con rapidez constante C entonces su vector aceleración es perpendicular al vector velocidad.

$$v^2 = |v|^2 = c^2 \Rightarrow v.v = c.c.$$

Si derivamos ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$v\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt}v = 0 \Rightarrow 2v\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v(t).a(t) = 0$$

***Ejemplo* 15**. *Trace los vectores velocidad y aceleración para* $t = \frac{\pi}{4}$ *si la partícula se mueve a través* $r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$.

Solución. Las derivadas de las componentes de la curva $r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ vienen dadas por:

$$f'(t) = -2sent \Rightarrow f''(t) = -2\cos\ t$$

$$g'(t) = 2\cos\ t \Rightarrow g''(t) = -2sent$$

$$h'(t) = 0 \Rightarrow h''(t) = 0$$

Luego los vectores velocidad y aceleración de la curva $r(t)$ serian.

$$r(\frac{\pi}{4}) = 2\cos\ \frac{\pi}{4}\hat{\mathbf{i}} + 2sen\frac{\pi}{4}\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

$$r(\frac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$$

$$v(\frac{\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

$$a(\frac{\pi}{4}) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$$

El proyectil se lanza con una velocidad inicial: $V_0 = V_0 sen\theta\hat{\mathbf{j}} + V_0\cos\ \hat{\mathbf{i}}$, desde una altura $S_0 = S_0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{i}}$.

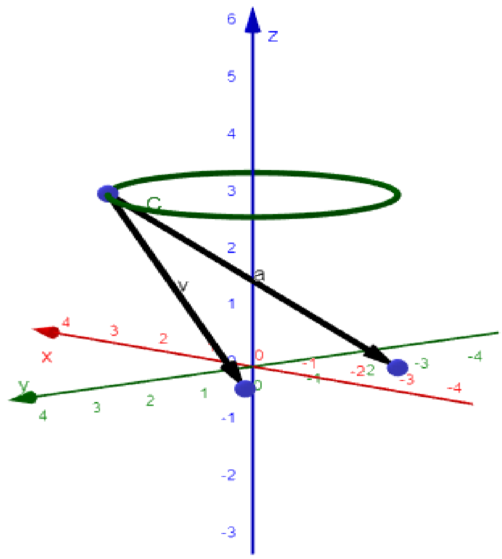


Figura 12: gráfica de los vectores del Ejemplo **15**.

11.3 Movimiento curvilíneo en el plano

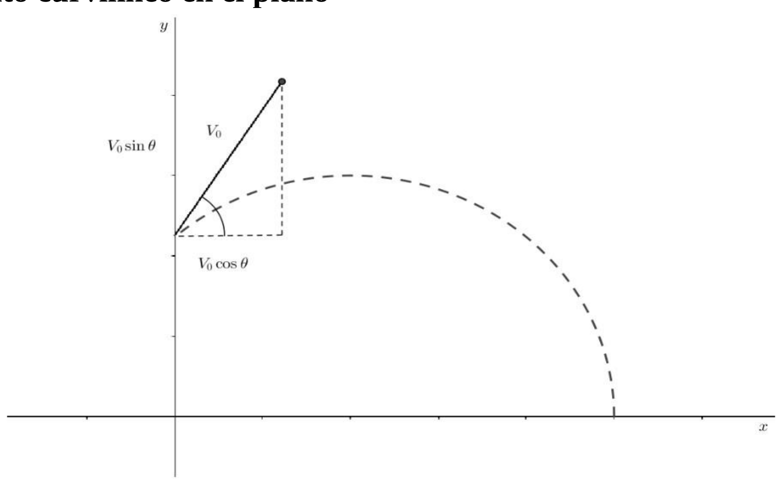


Figura 23: movimiento curvilíneo en el plano.

Consideramos que la aceleración de la gravedad expresada con forma vectorial $a(t) = -g\hat{\mathbf{j}}$. El proyectil se lanza con una velocidad inicial: $V_0 = V_0 sen\theta\hat{\mathbf{j}} + V_0\cos\ \hat{\mathbf{i}}$, desde una altura $S_0 = S_0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{i}}$.

Integrando con respecto a t.

$$\begin{aligned} V(t) &= \int a(t).dt = -\int g.d_t = -gt\hat{\mathbf{j}} + C_1 = V_{CD} \\ V(0) &= C_1, V(t) = (-gt + (V_0 sen\theta)\hat{\mathbf{j}} + V_0\cos\ \theta\hat{\mathbf{i}} \end{aligned}$$

integrando respecto a t.

$$\begin{aligned} r(t) &= \int (-gt + V_0 sen\theta).dt\hat{\mathbf{j}} + \int V_0\cos\ \theta.dt\hat{\mathbf{i}} \\ r(t) &= (-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen\theta t)\hat{\mathbf{j}} + V_0\cos\ \theta t\hat{\mathbf{i}} + C_2 \end{aligned}$$

Sabemos que $r(0) = S_0\hat{\mathbf{j}}$.

$$\begin{aligned} r(t) &= (-\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen\theta t + S_0)\hat{\mathbf{j}} + V_0\cos\ \theta t\hat{\mathbf{i}} \\ x(t) &= V_0\cos\ \theta t \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sen\theta t + S_0 \end{aligned}$$

Si derivamos t, y la igualamos a 0.

$y'(t) = 0 \Rightarrow t_* \rightarrow$ (punto crítico donde la función se hace máxima) tiempo en alcanzar su altura máxima.

$y(t) = 0 \Rightarrow t_* \rightarrow$ (alcance máximo) tiempo en que se tarda en llegar al final.

***Ejemplo* 16**. *Un proyectil es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de* $768\frac{pies}{seg}$ *y con un ángulo de elevación de 30°. Determine: la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil.*

Solución. *Como el proyectil es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de* $768\frac{pies}{seg}$ *y con un ángulo de elevación de 30°, tenemos que el vector velocidad inicial es:*

$$V_0 = (768\frac{ft}{s})\cos\ 30°\hat{\mathbf{i}} + (768\frac{ft}{s})sen30°\hat{\mathbf{j}}$$

$$V_0 = 384\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}} + 384\hat{\mathbf{j}}$$

Luego, el vector velocidad y el vector posición sería.

$$a(t) = -g = -32\hat{\mathbf{j}}\frac{ft}{s}$$

$$V(t) = \int a(t).dt = -32t\hat{\mathbf{j}} + C_1$$

$$V(t) = (-32t + 384)\hat{\mathbf{j}} + 384\sqrt{3}\hat{\mathbf{i}}$$

$$r(t) = \int V(t).dt = (-16t^2 + 384t)\hat{\mathbf{j}} + 384\sqrt{3}t\hat{\mathbf{i}},$$

Con $x(t) = 16t^2 + 384t$ y $y(t) = 384\sqrt{3}t$

12. Componentes de la aceleración curvatura. Vector tangente unitario y vector normal unitario

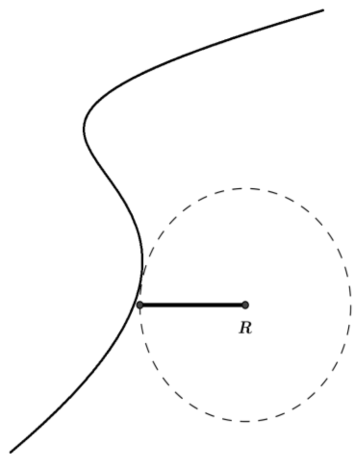


Figura 14: aceleración de la curvatura.

***Definición* 12**. *(Vector tangente unitario). Sea* C *una curva dada por* $r(t) = f(t)\hat{\mathbf{i}} + g(t)\hat{\mathbf{j}} + h(t)\hat{\mathbf{k}}$, *donde* f, g *y* h *tienen segundas derivadas, si* $|r'(t)| \neq 0$ *en el punto* P *de* C. *Se define el vector tangente unitario en* P*:*

$$T = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

Sabemos que $V(t) = r'(t)$ y la rapidez es $\frac{ds}{dt} = r = |V(t)| = |r'(t)|$ entonces:

$$V(t) = r \cdot T,$$

es igual a la rapidez por el vector tangente unitario.

Si derivamos la velocidad tenemos:

$$V'(t) = a(t) = V.\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}} + \frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dt}}.T$$

Ahora si derivamos T.T=C

$$\frac{d(T.T)}{dt} = T.\frac{dT}{dt} + \frac{dT}{dt}.T = 0$$

T y $\frac{dT}{dt}$ son ortogonales.

$$2T.\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T.\frac{dT}{dt} = 0$$

Si $\left|\frac{dT}{dt}\right| \neq 0$, el vector:

$$N = \frac{\frac{dT}{dt}}{\left|\frac{dT}{dt}\right|} \Rightarrow \left|\frac{dT}{dt}\right| N = \frac{dT}{dt}$$

Es el vector normal unitario de la curva C en P con dirección dado por $\frac{dT}{dt}$. Si definimos $k = \frac{\left|\frac{dT}{dt}\right|}{\frac{ds}{dt}}$ como la Norma de la derivada del vector tangente/rapidez.

Entonces:

$$k\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dT}{dt}\right| \Rightarrow kr = \left|\frac{dT}{dt}\right|$$

Ahora,

$$\frac{dT}{dt} = kV.N$$

Así, la aceleración se convierte en:

$$a(t) = kV^2N + \frac{dv}{dt}T$$

La función escalar k se denomina curvatura de la curva C en P. Así, $a(t) = a_N N + a_T T$, vemos que el vector aceleración a es la resultante de dos vectores ortogonales $a_N N$ y $a_T T$. Las funciones escalares $a_T \frac{dv}{dt}$ y $a_N = KV^2$ se llaman componentes tangencial y normal de la aceleración.

La curvatura es la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario con respecto a la longitud de arco.

$$k = \left|\frac{dT}{dt}.\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dT}{ds}\right|$$

13. Vector binormal unitario

***Definición* 13**. *(Vector binormal). Se define $B = T \times N$, y recibe el nombre de vector binormal B, donde T y N son mutuamente ortogonales y son ortogonales a B.*

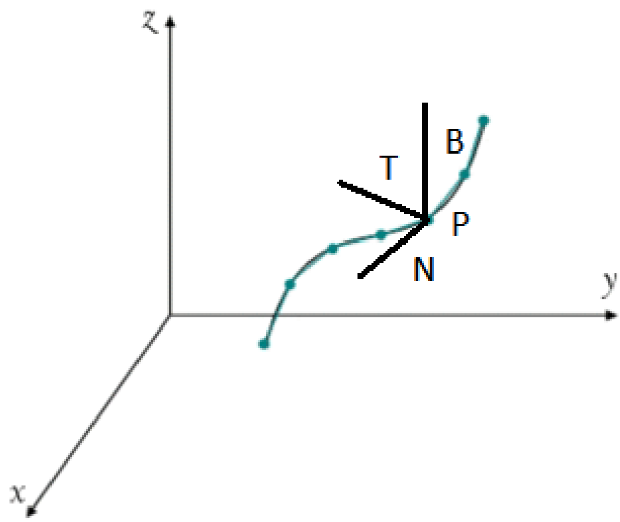


Figura 35: vector binormal unitario.

El plano determinado por T y N se denomina plano oscilador. El plano determinado por N y B se llama plano normal, mientras que el plano determinado por T y B se llama plano rectificador.

***Ejemplo* 17**. *La posición de una partícula móvil está dada por*

$$r(t) = 2\cos\ t\hat{\mathbf{i}} + 2sent\hat{\mathbf{j}} + 3t\hat{\mathbf{k}}$$

Encuentre los vectores tangente, normal y binormal T, N y B respectivamente de la curva dada, y determine su curvatura.

Solución. Tenemos que

$$r'(t) = -2sent\hat{\mathbf{i}} + 2co\,s\,t\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$$

Luego

$$|r'(t)| = \sqrt{(-2cos\ t)^2 + (2sent)^2 + 3^2}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{4sen^2t + 4\cos^2 t + 9}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{4(sen^2t + \cos^2 t) + 9} = \sqrt{13}$$

Luego el vector tangente T es

$$T = \frac{-2sent\hat{\mathbf{i}} + 2\cos t\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{13}}$$

$$T = \frac{-2sent\hat{\mathbf{i}}}{\sqrt{13}} + \frac{2\cos t\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{13}} + \frac{3\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-2}{\sqrt{13}}\cos t\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$$

$$\left|\frac{dT}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\cos t\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}sent\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{13}\cos^2 t + \frac{4}{13}sen^2t}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{13}(sen^2t + \cos^2 t)} = \sqrt{\frac{4}{13}}$$

De lo anterior, tenemos que el vector normal N

$$N \quad = \frac{\frac{-2}{\sqrt{13}}\cos\ t\hat{\mathbf{i}} - \frac{2}{\sqrt{13}}sent\hat{\mathbf{j}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}}$$

$$N = \frac{\frac{-2}{\sqrt{13}}\cos\ t\hat{\mathbf{i}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}} - \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}sent\hat{\mathbf{j}}}{\frac{4}{\sqrt{13}}}$$

$$N = -\cos\ t\hat{\mathbf{i}} - sent\hat{\mathbf{j}}$$

Por tanto, el vector binormal B será

$$B = T \times N$$

$$B = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{-2sent}{\sqrt{13}} & \frac{2\cos\ t}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos\ t & -sent & 0 \end{vmatrix}$$

$$B \quad = \frac{3}{\sqrt{13}} sent\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos\ t\hat{\mathbf{j}} + (\frac{2sen^2 t}{\sqrt{13}} + \frac{2\cos^2\ t}{\sqrt{13}})\hat{\mathbf{k}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{13}} sent\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos\ t\hat{\mathbf{j}} + \frac{2sen^2 t + 2\cos^2\ t}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{k}}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{13}} sent\hat{\mathbf{i}} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cos\ t\hat{\mathbf{j}} + \frac{2}{\sqrt{13}}\hat{\mathbf{k}}$$

De igual forma, tenemos que la curvatura k es $k = \frac{\sqrt{\frac{4}{13}}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}$

14. Radio de curvatura

***Definición* 14**. *(Radio de curvatura). El recíproco de la curvatura k de una curva $r(t)$, $P = \frac{1}{k}$, se llama el radio de la curvatura de la curva $r(t)$. El radio de la curvatura en punto P de una curva es el radio de la circunferencia que se ajusta de mejor forma a la curva.*

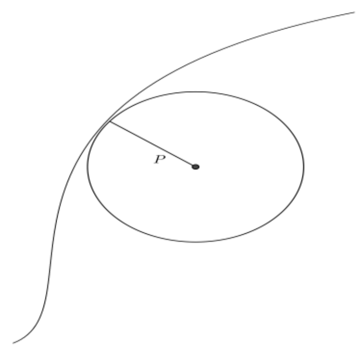


Figura 46: Radio de curvatura.

Conociendo el radio de la curvatura, es posible determinar la rapidez V a la cual un auto puede tomar una curva inclinada sin que derrape.

***Ejemplo* 18**. *Si* $r(t) = t\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{2}t^2\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}t^3\hat{\mathbf{k}}$ *es el vector posición de una partícula móvil, determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración para* $t = \frac{\pi}{2}$ *y encuentre la curvatura.*

Solución. *Para establecer el vector velocidad y el vector aceleración establecemos la derivada del vector posición y lo evaluamos en* $t = \frac{\pi}{2}$. *Así, tenemos:* $V(t) = i + tj + t^2k$ *y* $a(t) = j + 2tk$ *evaluando* $t = \frac{\pi}{2}$ *en el vector velocidad y aceleración respectivamente tenemos:* $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = i + \frac{\pi}{2}j + \frac{\pi^2}{4}k$ *y* $a\left(\frac{\pi}{2}\right) = j + \pi k$. *Finalmente se debe* *construir el vector binormal en $t=\frac{\pi}{2}$, decir la curvatura corresponde a la magnitud de la razón de cambio del vector tangente unitario T con respecto a la longitud de arco, queda para el lector poder establecerlo.*

Recuerde que el vector tangente T unitario se define como $T=\frac{V(t)}{\|V(t)\|}$ y la curvatura $\kappa=\| \frac{dT}{ds} \|$

Ejercicios:

1. Encuentre la longitud de la curva $r(t)=2\cos\ t\hat{\mathbf{i}}+2sent\hat{\mathbf{j}}+t\hat{\mathbf{k}}t\geq 0$

   para $0\leq t\leq 3$

2. Suponga que una partícula se mueve a lo largo de una hélice circular en $\mathbb{R}^3$ de tal modo que su vector posición en el tiempo t es

$$r(t)=(4\cos\ \pi)\hat{\mathbf{i}}+(4sen\pi t)\hat{\mathbf{j}}+t\hat{\mathbf{k}}$$

   encuentre la distancia recorrida y el desplazamiento de la partícula durante el intervalo $1\leq t\leq 5$

3. Trace los vectores velocidad y aceleración para $t=\frac{\pi}{4}$, si la partícula se mueve a través $r(t)=2\cos\ t\hat{\mathbf{i}}+2sent\hat{\mathbf{j}}+3\hat{\mathbf{k}}$

4. La posición de una partícula móvil está dada por

$$r(t)=2\cos\ t\hat{\mathbf{i}}+2sent\hat{\mathbf{j}}+3t\hat{\mathbf{k}}$$

   Encuentre T, N y B, determine la curvatura.

5. Si $r(t)=t\hat{\mathbf{i}}+\frac{1}{2}t^2\hat{\mathbf{j}}+\frac{1}{3}t^3\hat{\mathbf{k}}$ es el vector posición de una partícula móvil, determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración para $t=\frac{\pi}{2}$ y $t=\frac{\pi}{3}$.

15. Conclusiones

En ingeniería y áreas afines el dominio de conceptos matemáticos es fundamental, en este capítulo se le brindó al estudiante las herramientas básicas para desarrollar aplicaciones de su entorno laboral que requieran fundamentos matemáticos concernientes al Álgebra Lineal y al Calculo Vectorial.

Además, se le proveyó al estudiante los conocimientos necesarios para profundizar en el estudio del Calculo Vectorial y temas relacionados en caso de que el estudiante tenga sed de aumentar sus conocimientos sobre estos temas.

Referencias:

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2009). *Cálculo multivariable.* 2ª edición. México: Limusa Wiley.

Ayres F., & Mendelson Jr. E., (2001). *Cálculo*. 4ª edición. México: McGraw-Hill.

Apostol, T. M. (2010). *Calculus II, Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differencial Equations and Probability*. New Jersey: Wiley.

Edwards, C.H., & Penney, D. E. (2008). *Calculus Early Transcendentals*. New York: Pearson- Prentice Hall.

Takeuchi, Y. (1975). *Análisis de varias variables.* Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Zill, D. G. (1987). *Cálculo con geometría analítica.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.